УДК 519.21

ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ НОСІЇВ РОЗПОДІЛІВ ТИПУ ДЖЕССЕНА-ВІНТНЕРА

О.П. Макарчук

Обраховано розмірність Хаусдорфа-Безиковича носія функції розподілу I-роду однієї випадкової величини з незалежними п'ятірковими цифрами.

Been calculated Hausdorff-Besicovitch dimension carrier distribution function of I-sort of a random variable with independent p'yatirkovymy numbers..

Означення 1. Спектром $S_{F_\xi} = S_\xi$ функції розподілу F випадкової величини ξ називається множина всіх точок росту F_ξ, тобто

$$S_{F_\xi} = \{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0 - \forall\varepsilon > 0\}.$$

Означення 2. Точковим спектром розподілу випадкової величини з функцією розподілу $F_\xi(x)$ називається множина D_ξ його атомів, тобто сукупність всіх точок, в яких $F_\xi(x)$ стрибки.

Означення 3. Носієм розподілу випадкової величини ξ з функцією розподілу $F_\xi(x)$ називається множина

$$N_\xi = N_{F_\xi} = \left\{ x : \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x)}{\varepsilon} > 0 \right\}.$$

Очевидно, що носій $N_\xi = \{x : F_\xi' \neq 0\}$ є множиною точок "суттєвого росту" функції розподілу $F_\xi(x)$ і $D_\xi \subseteq N_\xi \subseteq S_\xi$. Якщо функція розподілу $F_\xi(x)$ неперервна і міра Лебега носія N_ξ рівна нулю, то розподіл є сингулярним; якщо тільки міра Лебега N_ξ відмінна від нуля, то $F_\xi(x)$ містить абсолютно неперервну компоненту. Носіями сингулярних розподілів випадкових величин є множини з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0 < 1$, причому їх H_1-міра Хаусдорфа рівна нулю, а розподіли з абсолютно неперервною компонентою мають носії додатної міри Лебега (отже, $\alpha_0(N_\xi) = 1$), тому близькість сингулярного розподілу до розподілу, що містить абсолютно неперервну компоненту, можна оцінювати по близькості розмірності Хаусдорфа- Безиковича носія розподілу до одиниці. Рівність розмірності одиниці не свідчить про те, що розподіл не є сингулярним. Останнє має місце лише тоді, коли H_1-міра Хаусдорфа носія додатня.

Означення 4. Число $\alpha_0 = \alpha_0(E)$, визначене рівністю

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\},$$

називається розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини E, де H_α-міра Хаусдорфа.

Побудуємо приклад сингулярного розподілу з аномальним спектром та носієм.

Теорема 1. Нехай випадкова величина $\xi = \frac{\xi_1}{5} + \frac{\xi_2}{5^2} + ... + \frac{\xi_n}{5^n} + ...$, де ξ_n – незалежні випадкові величини, які мають розподіл:

ξ_n:

0	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Виконуються рівності $\lambda(S_\xi) = 0$, $\alpha_0(N_\xi) = \log_5 2$?

Доведення.

За теоремою Джессена-Вінтнера ξ має чистий розподіл, тобто або чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або сингулярний.

Покажемо, що спектр є множиною чисел вигляду

$$A = \{\frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + ... + \frac{a_k}{5^k} + ... \mid a_n \in \{0;2\}, \forall n \in N\}$$

Нехай $x = \frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + ... + \frac{b_k}{5^k} + ..., b_n \in \{0;2\}, \forall n \in N$ і $\varepsilon > 0$, зрозуміло що для деякого $j \in N : l = [\frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + ... + \frac{b_j}{5^j}; \frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + ... + \frac{b_j}{5^j} + \frac{2}{5^{j+1}} + \frac{2}{5^{j+2}} + ...] \subset [x - \varepsilon; x - \varepsilon]$, бо $l \to \{x\} (j \to \infty)$, тому

$$F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) \geq P\{\xi \in [\frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + ... + \frac{b_j}{5^j}; \frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + ... + \frac{b_j}{5^j} + \frac{2}{5^{j+1}} + \frac{2}{5^{j+2}} + ...] =$$

$$= \prod_{k=1}^{j} \frac{1}{2} \prod_{k=j+1}^{\infty} P\{\xi_k \in \{0;2\}\} = (\frac{1}{2})^j > 0 \Rightarrow x \in S_\xi$$

Нехай $x = \frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + ... + \frac{b_k}{5^k} + ... \notin A, b_n \in \{0;2\}, \forall n \in \{1,...,k-1\}, b_k \notin \{0,2\}$

Тоді при $\varepsilon = \frac{1}{5^{k+2}} : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) \geq P\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} = 0 \Rightarrow x \notin A$

Отже, $A \equiv S_\xi$.

Якщо, $x \notin A$ то зрозуміло, $F_\xi(x) = 0$, Якщо, $x \in A$ то зрозуміло,

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} \times ... \times \frac{1}{2} \times ... = 0,$$

Отже, ξ не містить атомів а тому є неперервним.

Це також можна було довести з використанням теореми Леві, адже максимальний стрибок $\xi_n - 0.5$, нескінченний добуток яких рівний 0.

Як, відомо множина слабонормальних чисел за основою 5 має міру Лебега 1, а множина чисел $A \equiv S_\xi$ не містить в своєму п`ятірковому розкладі цифр 1,3,4 тому $\lambda(S_\xi) = 0$, а тому ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. Для випадкових величин такого типу S_ξ і N_ξ співпадають.

Оскільки множину $A = \{\frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + ... + \frac{a_k}{5^k} + ... | a_n \in \{0;2\}, \forall n \in N\}$ можна представити у вигляді об`єднання двох множин $A_1 = \{\frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + ... + \frac{a_k}{5^k} + ... | a_1 = 0, a_{n+1} \in \{0;2\}, \forall n \in N\}$ та

$A_2 = \{\frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + ... + \frac{a_k}{5^k} + ... | a_2 = 0, a_{n+1} \in \{0;2\}, \forall n \in N\}$,

кожна з яких подібна до A з коефіцієнтом $\frac{1}{5}$, то розмірність Хаусдорфа-Безиковича є розв'язком рівняння

$2\left(\frac{1}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow x = \log_5 2$, тобто, $\alpha_0(N_\xi) = \log_5 2$.

Побудуємо носій функції розподілу випадкової величини з заданими фрактальними властивостями

Теорема 2. Для довільного $a \in [0;1]$ існує випадкова величина ξ, така що $\alpha_0(N_\xi) = a$, де α_0 – розмірність Хаусдорфа-Безиковича, N_ξ - носій випадкової величини ξ.

Доведення.

Розглянемо окремо три випадки:

1) $a \in (0;1)$
2) $a = 1$
3) $a = 0$

1)Розглянемо випадкову величину ξ з незалежними Q_3 символами: $\xi = \Delta^{Q_3}_{\xi_1\xi_2\xi_3...}$, де ξ_n – незалежні дискретно розподілені випадкові величини(символи), які мають наступні розподіли:

ξ_n:

0	1	2
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

також візьмемо $q_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, $q_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, $q_1 = 1 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, що можливо адже $q_0, q_2 \in (0;1)$

і $q_0 + q_2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}} = 2^{1-\frac{1}{a}} < 2^0 = 1.$

Оскільки $P\{\xi_n = 1\} = 0,$ то ξ є , як відомо, (Турбин А.Ф, Працевытий Н.В Фрактальные множества, функции распредиления) випадковою величиною типу Джессена-Вінтнера І-го роду, тобто $S_\xi = N_\xi$. S_ξ – представляє собою множину всіх реалізацій ξ, тобто множину чисел в яких у їх Q_3 є цифри 0 і 2, але немає цифри 1. S_ξ представляє собою самоподібну множину, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої співпадає з самоподібною розмірністю і є розв'язком рівняння $q_0^\alpha + q_2^\alpha = 1,$ тобто $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{a}} = 1,$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{a}} = \frac{1}{2},$ $\frac{\alpha}{a} = 1,$ $\alpha = a$.(Працьовитий *М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів)

Отже, $\alpha_0(N_\xi) = \alpha_0(S_\xi) = a$.

Потрібно зазначити, що при $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$ $F_\xi(x)$ є функцією Кантора, а $S_\xi \equiv N_\xi$ – є множиною Кантора.

2) $a = 0$.

Побудуємо випадкову величину у якої носій є аномальним фракталом

Розглянемо випадкову величину $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^{n^2}}$, де ξ_n – незалежні дискретно розподілені випадкові величини, які мають розподіли

ξ_n :

0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Покажемо, що $\lambda(S_\xi) = 0$, тоді $S_\xi \equiv N_\xi$. Дійсно $S_\xi = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^{n^2}} \middle| \varepsilon_n = 0 \vee 1, \forall n \in N\right\}$.

Нехай $x \in S_\xi$, $x = \Delta^2_{0,\varepsilon_1 0..0\varepsilon_2 0..\varepsilon_3..\varepsilon_{n-1}0..\varepsilon_n 0..\varepsilon_{n+1}}$ $k \in N$, тоді для деякого $n \in N$: $n^2 \le k \le (n+1)^2$, маємо: $\frac{N_1(x,k)}{k} \le \frac{n}{k} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто $v_1(x) = 0$ і $v_0(x) = 1$, тому $S_\xi \subset E[1;0]$, причому $\lambda(E[1;0]) = 0$ і $S_\xi \equiv N_\xi$.

За формулою Безиковича-Егглстона $\alpha_0(E[1;0]) = -\frac{\ln 1^1 \cdot 0^0}{\ln 2} = 0$, тобто

$0 \le \alpha_0(S_\xi) \le \alpha_0(E[1;0]) = 0 \Rightarrow \alpha_0(N_\xi) = \alpha_0(S_\xi) = 0.$

3) $a = 1$

Побудуємо випадкову величину у якої носій є суперфракталом

Нехай $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right]$. Оскільки $\lambda\left(E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right]\right) = 0 \ \forall n \in N$, то $\lambda(E) = 0$.

Оскільки $E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right] \subset E$, то

$$\alpha_0(E) \ge \alpha_0\left(E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right]\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}}}{\ln 2} \to -\frac{\ln \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}}{\ln 2} = 1 (n \to \infty,$$

тому $\alpha_0(E) = 1$.)

ПОСИЛАННЯ

[1] Гонтаренко М.О. Спектри та носії випадкових величин // *VIII Всеукраїнська студентська наукова конференція "Сучасні проблеми фізико-математичних наук та методики їх викладання",* 17-18 квітня 2013 р., Ніжин. Матеріали конференції. Ніжин, 2013., 95 с.

[2] Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Критерії сингулярності та абсолютної неперервності випадкової величини в термінах ймовірності суттєвого носія щільності // *Вісник НПУ імені М.П.Драгоманова.* К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2002., Випуск 1. С.156-158.

[3] Гончаренко Я.В. Згортки сингулярних розподілів ймовірностей // *Український математичний конгрес. Теорія ймовірностей і математична статистика.* Тези доповідей..Київ: ІМ НАНУ, 2001, С.8.